REVISTA EMA
1999, VOL. 5, Nº 1, 3-28

UN PROYECTO DE APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO:

NICOLINA MALARA

Se presenta una visión global de un proyecto[2] para la renovación de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la escuela media, dirigido a dar significado y motivación a su estudio (desde su lenguaje hasta sus objetos). En particular, se presentan brevemente los principales resultados desde dos ángulos, el de las concepciones de los profesores y el del conocimiento y las habilidades de los estudiantes. Además se hace referencia a las contribuciones de los profesores, destacando aspectos positivos y negativos. Se concluye con algunas consideraciones acerca de la posible influencia del estudio a largo plazo.

INTRODUCCIÓN

La literatura internacional sobre problemas que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra subraya la crisis de la enseñanza tradicional. Muchos estudios destacan los obstáculos cognitivos principales que la enseñanza tradicional de la aritmética —que frecuentemente se enfoca en los resultados de los procesos de cálculo más que en los aspectos relacionales y estructurales (Kieran, 1990, 1992)— le pone al desarrollo del pensamiento algebraico. Otros estudios enfatizan las dificultades que ocurren en la codificación formal de enunciados de problemas (MacGregor, 1991; Bednarz y Janvier, 1996) y en un nivel más avanzado, las dificultades en el manejo y el control del lenguaje algebraico desde un punto de vista lógico (Bloedy-Vinner, 1995). Otros estudios enfatizan la falta de consciencia en la transición procedimental-estructural (Sfard, 1991, 1994) y la falta de consciencia de la flexibilidad y coordinación entre los varios elementos de conocimiento que se sobreponen en el tiempo (Drouhard y Sackur, 1997). Otros estudios (Yerushalmy, 1997; Kieran, 1994, 1998) evidencian

1. Traducción del original "Project of approach to the algebraic thought: experiences, results, problems", realizada por Patricia Inés Perry, investigadora de "una empresa docente", en colaboración con Hernando Alfonso.
2. Trabajo que incluye entre el 40% y el 60% de los proyectos MURST (sigla del Ministero della Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica).

que el uso de software interactivo de visualización gráfica invita a una revisión del camino de enseñanza que se sigue hoy en día.

Con esta base teórica, de acuerdo con el modelo de desarrollo del pensamiento algebraico hecho por Arzarello et al. (1992), hemos puesto en marcha un proyecto experimental de innovación para iniciar el pensamiento algebraico en la escuela media[3]. Este proyecto que aún sigue en curso apunta hacia un acercamiento, gradual y consciente, a los objetos del álgebra a través de procesos de matematización. El proyecto tiene dos niveles de intervención: sobre (y con) los profesores y los estudiantes. Para comprender las características de nuestros estudios es importante saber que se enmarcan en los veinticinco años de tradición italiana de los llamados núcleos de investigación didáctica que operan en varias universidades italianas con la cooperación conjunta y voluntaria de investigadores universitarios y profesores de colegios. Varios de tales profesores han estado siguiendo las actividades de los núcleos desde hace ya tiempo; algunos de ellos también son reconocidos hoy día como investigadores, de tal manera que han alcanzado la doble naturaleza profesional de profesor-investigador (PI). Ciertamente, se trata de profesores altamente motivados, cuidadosos y dispuestos a involucrarse con plena consciencia[4].

Como lo hemos dicho, el proyecto tiene que ver con un proceso complejo en el que se consideran los siguientes aspectos:

- las creencias iniciales de los profesores, el desarrollo en ellos de nuevas actitudes y concepciones hacia el enfoque del álgebra (gracias al análisis crítico de los estudios sobre el tópico que se lleva a cabo con el director de la investigación) y la implicación de ello en las elecciones culturales y metodológicas para las actividades de clase;
- la interacción entre el director de la investigación y los profesores al planear conjuntamente las intervenciones de clase y construir preguntas para evaluar hipótesis pertinentes de investigación;
- el estudio conjunto (de director y profesores) sobre el comportamiento de los estudiantes y el análisis cualitativo de sus producciones;
- la realimentación a la innovación en el salón de clase y a las creencias de los profesores.

3. En los tres años anteriores el proyecto fue difundido en la escuela primaria mirando de nuevo la enseñanza de la aritmética con un enfoque prealgebraico (ver Navarra, 1999).
4. Para mayores detalles sobre el estado del arte de la investigación italiana y en particular sobre el papel del profesor-investigador, véase Arzarello (1999) o también Malara (1998).

Los elementos novedosos que no aparecen en los estudios que hemos citado son la complejidad del proceso por un lado, y por otro, la consideración de elementos de conocimiento no muy estudiados en la literatura relativa a este nivel escolar, como son: la prueba en el contexto de la aritmética, aspectos relacionales y de analogía estructural en varios ámbitos numéricos, el campo ordenado de los números racionales, el concepto de función.

En este artículo, después de hacer una revisión rápida al proyecto nos concentramos en:

- algunos resultados de actividades experimentadas, con comentarios sobre el comportamiento de los estudiantes;
- algunas preguntas que tienen que ver con la forma como hemos adelantando la investigación y el papel de los profesores en estas situaciones;
- comentarios acerca de problemas más generales.

VISTA GLOBAL DEL PROYECTO

El proyecto se inició en 1994, después de dos años de intensa lectura y discusión acerca de los problemas de enseñanza y aprendizaje del álgebra, que se llevaron a cabo en seminarios de estudio con los profesores[5].

La necesidad de un estudio más profundo llegó a ser clara para nosotros mientras trabajábamos en un proyecto previo de investigación acerca de “problemas” (Malara, 1993). En aquel tiempo los profesores eran escépticos con respecto al estudio de problemas algebraicos enunciados verbalmente. Creían imposible trabajar con cualquier problema significativo de esta clase en la escuela media por la poca familiaridad de los estudiantes con los métodos de solución de ecuaciones y sistemas lineales. Muchos profesores incluso tenían su propia concepción del álgebra que infortunadamente era reducida y distorsionada[6].

Puesto que creíamos necesaria una nueva fundamentación y clarificación conceptual en este campo, ya que el lenguaje algebraico es tan importante, decidimos concentrarnos en el álgebra con un proyecto amplio de innovación didáctica. Queríamos que los profesores enfocaran el álgebra

5. En la actualidad, están involucrados en el proyecto los siguientes profesores: Loredana Gherpelli (PI), Rosa Iaderosa (PI), Giancarlo Navarra (PI), Giovanna Grasso, Deanna Pellacani, Maria Clete Spadoni, Antonella Trevisan y, marginalmente, casi diez profesores más que no mencionamos.
6. Debe subrayarse que la mayoría de las personas que enseñan matemáticas en este nivel escolar realmente no han hecho nunca estudios específicos en matemáticas ni tampoco un entrenamiento profesional.

como un lenguaje (no solamente en sus aspectos sintácticos sino sobre todo en los de traducción y producción/comunicación del pensamiento) y promover el empleo temprano de las letras en sus clases. Las letras debían ser empleadas para codificar relaciones, por una parte, y por otra, para formular propiedades en términos generales. Todo esto debía ser llevado a cabo *a través* y *por medio* del estudio de problemas internos o externos a la matemática y también de tipo demostrativo.

Gracias al análisis crítico de muchos estudios de esos años[7], los profesores de nuestro grupo se hicieron conscientes gradualmente de la necesidad de una renovación profunda de la práctica didáctica usual y comenzaron a motivarse para ponerse a prueba ellos mismos con indagaciones experimentales acerca del tópico.

Por tanto planeamos un proyecto experimental para los tres años de la escuela media[8] con la intención precisa de monitorear la misma clase durante los tres años de escolaridad[9] y de realizar estudios específicos con otras clases al mismo tiempo.

El núcleo del proyecto era realizar una aproximación informal al lenguaje algebraico enfocándonos, por una parte, en el control del significado de lo escrito que se origina en la necesidad de codificar o generalizar relaciones entre elementos que entran en juego en las situaciones problemáticas dadas, y por otra parte, en la comparación de escritos que se derivan de formas diferentes aunque equivalentes de codificar tales relaciones. En esta aproximación las propiedades de las operaciones aritméticas nos guiaron para establecer las leyes de transformación sintáctica que era la meta de una actividad colectiva lenta y difícil. Un tema dominante fue la comparación constante de las operaciones de adición y multiplicación para forzar la atención de los estudiantes no solamente hacia las analogías sino también hacia las diferencias entre las dos. Una de las hipótesis de nuestra investigación era de hecho que esta comparación podía evitar transferencias impropias o mezclas de propiedades de las dos estructuras que siempre dan rienda suelta a los diversos y persistentes errores de los que la literatura da testimonio (ver por ejemplo Fishbein y Barach, 1993; Fishbein, 1994).

7. Nos limitamos a citar los de Bell (1987), Filloy y Rojano (1989), Kieran (1990, 1992), Kuchemann (1981), Sfard (1991) y los artículos sobre el tema publicados en las memorias de los encuentros anuales del PME (Psychology of Mathematics Education). Debe subrayarse que el estudio crítico de la literatura de investigación continuó a lo largo del desarrollo del proyecto.
8. Ver Malara y Gherpelli (1996) o Malara e Iaderosa (1999a) en relación con la articulación de los tres años de actividades experimentales.
9. Se debe tener en cuenta que usualmente en Italia el mismo profesor trabaja a lo largo de los tres años de la escuela media con la misma clase. La clase que hemos observado trabajó con la profesora investigadora L. Gherpelli (ver Gherpelli y Malara, 1998).

Los elementos centrales en nuestra planeación de las actividades fueron:

- la revisión crítica-reflexiva de los contenidos de la aritmética que se abordan en la escuela primaria y el énfasis de aquellos aspectos usualmente descuidados que la mayoría de los estudios considera como causas que impiden el paso de la aritmética al álgebra[10];
- el empleo temprano de las letras y el énfasis del vínculo entre el lenguaje algebraico y el natural dando importancia particular a los significados y a los papeles de algunos de estos elementos lingüísticos tales como términos, signos, símbolos y convenciones tanto en las actividades de traducción de un lenguaje al otro como en el cambio del ámbito aritmético al algebraico[11];
- la adquisición progresiva del lenguaje simbólico visto como un hecho cultural en analogía con lo que ocurre en el aprendizaje de cualquier otra lengua, entrelazando el estudio de la sintaxis con la traducción y la producción de pensamiento.

Desde un punto de vista metodológico general, nuestros profesores siempre trabajan de manera constructiva, estimulando y orquestando las interacciones de los estudiantes, promoviendo la reflexión del grupo sobre lo que se está llevando a cabo de manera gradual, hasta que eventualmente el conocimiento se institucionalice. Lo usual es que en la clase:

- se use la verbalización como una herramienta (los estudiantes acostumbran siempre a escribir sus ideas, conjeturas, razones para las elecciones procedimentales que hacen, etc.);
- se ofrezcan situaciones de problemas abiertos que se puedan interpretar desde varios puntos de vista de tal manera que se incite a los estudiantes al pensamiento hipotético;
- se permita a los estudiantes analizar los razonamientos y procedimientos de otros estudiantes (tanto de manera individual como en grupos pequeños);
- se dé tiempo para discusión colectiva de tal manera que las conclusiones socialmente acordadas —que cada alumno siente como propias— surjan de la confrontación y de la pluralidad de ideas[12].

10. Un análisis detallado de estos aspectos se puede encontrar en Malara (1997).
11. Aunque el código algebraico nace como una generalización del aritmético, existen diferencias entre estos dos códigos; por ejemplo, un símbolo que en aritmética tiene un único significado, en álgebra tiene varios significados y papeles (ver Malara e Iaderosa, 1998).

EJECUCIÓN DEL PROYECTO

Aquí describimos brevemente y en orden cronológico algunos estudios que hemos llevado a cabo en la escuela media, relacionados con: la argumentación y la prueba en aritmética, la solución de problemas algebraicos, el trabajo entremezclado de álgebra y aritmética, la aproximación a la estructura de los números racionales y al concepto de función.

Argumentación y prueba en aritmética

Este primer estudio tuvo que ver con el análisis del comportamiento de los estudiantes y sus producciones al enfrentarse con problemas de indagación tales como los que se mencionan en la Tabla Nº 1. Comenzamos con este asunto en los primeros grados. En estas situaciones los alumnos debían no sólo encontrar propiedades y regularidades sino también discutir hipotéticamente, encontrar contraejemplos y sustentar sus opiniones.

Discuta la siguiente información acerca de números naturales diciendo por qué para usted es verdadera o falsa.
1) La suma de dos números pares es divisible por 4.
2) Si el producto de dos números es par (impar), cada uno de los dos factores es par (impar).
3) Un número divisible por 3, es decir, de la forma 3n, siempre es impar.
4) El cuadrado de cualquier número par es divisible por 4.
5) Todos los números divisibles por 3 son también divisibles por 9.
6) Si 3 divide a dos números naturales, también divide a su suma o a su diferencia.
7) El producto de dos números pares es divisible por 7.
8) Hay valores de n para los cuales 5n + 3 es: divisible por 5, divisible por 3, divisible por 2.
9) La suma de dos números que divididos, cada uno, por 5 tienen residuo 1, es un número que dividido por 5 da residuo 1.
10) La suma de cuatro números naturales consecutivos siempre es par.

Tabla Nº 1. Ejemplos de actividades de indagación en el ámbito aritmético

Con estas preguntas los estudiantes comprenden gradualmente el papel de los contraejemplos para refutar la presunta verdad de un enunciado y en con-

12. Tales criterios se pueden considerar como el fundamento común para toda la investigación italiana en innovación de didáctica de la matemática (Arzarello, 1999).

secuencia que las revisiones numéricas aun si son varias no son suficientes para declarar la verdad de una afirmación, razón por la cual se requiere una argumentación general.

En esta primera fase nuestra atención se centró en el uso de las letras por parte de los estudiantes y en el papel que les asignaban en la argumentación y también revisamos la codificación espontánea que ellos hacían de las propiedades y relaciones que eran discutidas más tarde en clase. Se puede encontrar análisis profundos de los protocolos acerca de las dificultades y potencialidades expresadas por los alumnos tanto como de los resultados globales en las clases en Gherpelli y Malara (1994). En este punto la actitud positiva de los estudiantes y los resultados obtenidos persuadieron a los profesores de que habían encontrado un campo de estudio muy productivo, lo que les motivó a continuar en la indagación con el paso de la argumentación a la prueba.

Iniciamos en los cursos de segundo grado, la aproximación a la prueba usando el código algebraico en: (a) pruebas construidas colectivamente (estudiantes y profesor); (b) pruebas "guiadas" por el profesor (quien indica los varios pasos y muestra la manera en que ellos deben enfrentar el asunto para alcanzar la meta)[13]; (c) pruebas que los estudiantes producen por sí mismos. No vamos a profundizar en este estudio aquí; para el análisis de las producciones de los estudiantes y los resultados globales de la innovación en las clases ver Malara y Gherpelli (1996); para comentarios acerca de la interacción entre profesores e investigadores universitarios tanto en el desarrollo de la investigación y en particular acerca de las discusiones de evaluación de los protocolos como sobre la investigación en sí misma, ver Malara e Iaderosa (1999a). Sin embargo, queremos subrayar que el resultado extremadamente positivo que obtuvimos al final de este ciclo escolar radica en la consciencia de los estudiantes de lo que significa 'probar' y el papel que el lenguaje algebraico juega en la aritmética.

La solución de problemas algebraicos

Nuestro segundo estudio entremezclado con el anterior tuvo que ver con problemas algebraicos enunciados verbalmente. Nuestra elección fue sugerir el estudio de problemas algebraicos enunciados verbalmente con una o más cantidades desconocidas, incluso problemas complejos, antes de la introducción formal de las ecuaciones. Esto primero que todo debía justificar frente a los estudiantes la oportunidad de estudiarlas como un objeto matemático, de acuerdo con el camino histórico lo mismo que con nuestros

13. El momento en el que el profesor actúa como un modelo es muy importante porque los estudiantes pueden comprender lo que realmente deben hacer y producir.

programas oficiales y, más en general, esto debería educar en el "principio de economía", típico de las matemáticas, que privilegia el estudio de los esquemas representativos de una pluralidad de situaciones[14].

En tales hipótesis queríamos estudiar el comportamiento de los estudiantes con respecto a:

- la traducción formal de relaciones expresadas por el texto verbal;
- la transformación y elaboración de relaciones para llegar a la ecuación resolutoria;
- el estudio informal de ecuaciones para la determinación de las cantidades incógnitas y la solución del problema.

Los problemas que dimos a los estudiantes, algunos de los cuales se pueden ver en la Tabla Nº 2, usualmente tienen un texto esquemático que requiere —excepto en algunos casos— una traducción formal más bien fácil. El número de cantidades incógnitas o desconocidas varían de dos a cuatro, mientras que las relaciones son principalmente aditivas, multiplicativas o ambas.

Los pasos didácticos que desarrollamos con los estudiantes se enfocaron en el control de la pluralidad de representaciones posibles para la misma relación; esto se logró formulando preguntas intermedias a los estudiantes con las que se pretendía impulsar una reflexión sobre las igualdades inducidas por la relación dada. Por ejemplo, al considerar la relación: "*el segmento AB es más largo que el segmento CD en cuatro centímetros*" hicimos las siguientes preguntas a los estudiantes:

1) *¿Cuál de los dos segmentos es el mayor y cuál es el menor?*
2) *Una vez que haya elegido el más largo (el menos largo) escriba cómo obtiene al otro.*
3) *Una vez que haya elegido el mayor escriba la diferencia entre los dos segmentos.*

Inducíamos el control simultáneo de las siguientes expresiones escritas: $\overline{CD} = \overline{AB} - 4$; $\overline{AB} = \overline{CD} + 4$; $\overline{AB} - \overline{CD} = 4$. De esta manera los estudiantes se acostumbraron a representar de varias formas una relación entre dos cantidades y después a escoger la más conveniente de acuerdo con el problema que se estuviera examinando. El método de resolución sugerido

14. Como es bien conocido, este estudio comienza tradicionalmente después de la introducción de ecuaciones lineales con una incógnita y dado que los estudiantes son tan jóvenes, los problemas que se emplean normalmente se pueden resolver de manera intuitiva y/o recurriendo a representaciones gráficas adecuadas. Esta forma de trabajar como lo destaca Bednarz y Janvier (1996), no les permite apreciar la bondad del método algebraico.

fue el de sustitución; se presentó como “el juego del intercambio” que debía aplicarse una o más veces hasta obtener una ecuación con una sola cantidad incógnita que debía ser la elaborada. En los problemas que consideramos, tal ecuación se podía reducir, gracias a las propiedades de las operaciones aritméticas, a la estructura $ax + b = c$ con a, b y c números naturales o racionales.

1) Considere el triángulo *ABC*, que descansa sobre el lado $\overline{AB}$, acerca del cual tiene la siguiente información: el perímetro mide 60 cm.; el lado $\overline{BC}$ es mayor que el lado $\overline{AC}$ en 5 cm.; el lado $\overline{AB}$ es mayor que el lado $\overline{AC}$ en 10 cm. Calcule las longitudes de sus lados. ¿Puede este triángulo ser rectángulo? Si lo es, ¿cuál debe ser el ángulo recto y cuál la hipotenusa?
2) Determine los dos números tales que el mayor exceda en 50 al triple del menor y su suma sea 110.
3) En un corral hay 224 animales entre gatos y perros. El número de gatos es seis veces el número de perros. Calcule cuántos gatos y cuántos perros hay en el corral.
4) Miguel va a una pizzería. Compra una pizza, un postre y una gaseosa y gasta en ello 8300 liras. El postre cuesta 1500 liras menos que la pizza. La pizza cuesta 400 liras más que el doble de lo que cuesta la gaseosa. Calcule el costo de cada una de las cosas compradas por Miguel.
5) El perímetro de un trapecio rectangular es 96 cm. La longitud de la base mayor es 20 cm. más que la longitud de la base menor. La diferencia entre la longitud de la base mayor y la del lado oblicuo es 13 cm. La diferencia entre la medida del lado oblicuo y de la altura es de 10 cm. Calcule las longitudes de las dos bases, del lado oblicuo y de la altura.

Tabla Nº 2. Problemas algebraicos con dos o más incógnitas, enunciados verbalmente, para segundo grado

Las dificultades, además del número de cantidades incógnitas y del tipo de relación tuvieron que ver con: (a) la traducción de relaciones en términos de las igualdades y sus transformaciones; (b) la elección de la cantidad incógnita a través de la que se va a expresar la otra; (c) el manejo de la ecuación resolutiva. Un reporte detallado de este estudio se puede encontrar en Malara (1999a).

En general, podemos decir que el impacto de esta actividad en las clases fue más bien fuerte tanto en la participación como en los resultados. Casi todos los estudiantes se dieron cuenta de que estaban ante un método general para resolver esta clase de problemas, que se basa en la traducción a fórmulas de la información contenida en los textos y en la elaboración posterior de las fórmulas obtenidas. En cuanto al aprendizaje vimos tres niveles: en el primero, los estudiantes llegan a ser usuarios autónomos del método algebraico, pueden enfrentar por sí mismos elaboraciones sintácticas razonadas de acuerdo con el principio de economía; en el segundo, los estudiantes aprenden el principio de traducción formal pero no van más allá de usarlo como en los modelos previos: estos estudiantes usualmente se bloquean en frente de situaciones nuevas, especialmente sintácticas; en el tercero, una minoría de estudiantes no comprende el espíritu del método algebraico y se esconde, cuando es posible, detrás de métodos de resolución gráfica que ya conoce. Debemos decir que el método algebraico fue bien aprendido también por los estudiantes que generalmente no eran brillantes, lo que les hizo sentirse listos y seguros.

El hecho de que ellos enfrentaran la solución de problemas algebraicos sin instrucción alguna acerca de la sintaxis del lenguaje algebraico llevó a los estudiantes a producir transformaciones sintácticas erróneas principalmente debidas a la falta de control sobre los significados de los escritos obtenidos; esta clase de problemas justificó el enfrentar asuntos sintácticos en sí mismos e independientemente del contexto, concentrando la atención sobre las propiedades aritméticas. Este aspecto del problema fue más bien interesante tanto para los estudiantes como para los profesores. Para los primeros porque eventualmente comprendieron por qué estudiaban el cálculo literal y cuán importante es; para los profesores porque se dieron cuenta de cuán vital es hablar a los estudiantes para negociar los significados de expresiones algebraicas simples que usualmente se dan por supuestas.

Aspectos sintácticos y estructurales

Este estudio se desarrolló en paralelo con los anteriores, en la clase tutorada por R. Iaderosa, profesora-investigadora con un fundamento matemático refinado y más sensible que los otros profesores a las preguntas transversales que subyacen al álgebra moderna.

El estudio examina una serie de problemas sintácticos que surgen de los cambios provenientes de varios ámbitos numéricos o dentro del mismo ámbito debido a la predominancia del modelo aditivo sobre el multiplicativo. La hipótesis del estudio se puede resumir como sigue: *si el conflicto que los estudiantes perciben entre la notación aditiva y la multiplicativa puede causar errores o confusión en el aprendizaje del lenguaje algebraico y de sus significados, ¿puede ser entonces didácticamente útil y en qué medida, encontrar situaciones y estrategias que fuercen a la comparación y a la transferencia entre las situaciones aditivas-multiplicativas y las multiplicativas-exponenciales?*

Sobre esa base hicimos un experimento con las clases de segundo y tercer nivel, que se enfocó en una serie de pruebas (algunas de las cuales se presentan en la Tabla Nº 3 explícitamente concebidas para forzar a una comparación entre las dos estructuras. Estas pruebas pedían a los estudiantes transcribir y elaborar expresiones aritméticas o algebraicas operando una transferencia analógica desde la estructura aditiva a la multiplicativa (usualmente en los números naturales) y viceversa, en un contexto con muchas operaciones y en situaciones distractivas que requerían un buen control entre la notación aditiva-multiplicativa y la multiplicativa-exponencial.

El propósito era investigar acerca de la habilidad de los estudiantes para ver la estructura de algunas expresiones y modificarlas por analogía. En Malara e Iaderosa (1998) se reporta una muestra de tales producciones que evidencia que casi la mitad de los estudiantes mantuvo un buen control de ambas notaciones. Como lo habíamos previsto, tuvieron dificultad para trabajar con potencias y algunos de los estudiantes menos hábiles simplemente trataron de explicitar las potencias como productos. En particular, los estudiantes identificaron relativamente bien la distinción (directa e inversa) entre adición y multiplicación, pero a la vez no pudieron controlar la operación de la potencia especialmente en el procedimiento inverso; esto se puede ver en los siguientes ejemplos de conversión:

- del ámbito aditivo-multiplicativo al multiplicativo-exponencial:

  $(2 \times 3) + 5 + 7 \times 2$ fue transformado en: (i) $(2^3)^5 \times 7^2$;

  (ii) $2^3 + 5 \times 7^2$; (iii) $2^3 \times 5 \times 7^2$; (iv) $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2$;

- del ámbito multiplicativo-exponencia al aditivo-multiplicativo:

  $2^3 \times 5 \times 7^2$ fue transformado en: (i) $2^3 + 5 + 7^2$;

  (ii) $(2 \times 3) \times 5 \times (7 \times 2)$; (iii) $(2 + 3) + 5 + (7 \times 2)$.

A posteriori estas pruebas permitieron a los profesores detectar qué nivel de conceptualización habían logrado alcanzar los estudiantes acerca de las operaciones aritméticas y sus propiedades y acerca de la caracterización de las dos estructuras que difícilmente se podían imaginar cuando estas pruebas fueron concebidas y administradas.

Sin embargo se debe subrayar que este estudio, que fue relativamente apreciado en los contextos de investigación[15], dio rienda suelta a reacciones

15. Estamos hablando acerca de la sesión del seminario nacional realizado en diciembre de 1997, del grupo de trabajo en álgebra del PME 22 (1998, Stellenbosch, Suráfrica) y de la conferencia europea SERME 1 (Osnabruck, 1998).

que contrastan entre los profesores, algunos de los cuales consideraron tal aproximación demasiado sofisticada y avanzada para este nivel escolar.

Escuela media, segundo grado

1) Calcule, usando tanto como sea posible, las propiedades de las potencias:
   a. $3^3 \times 3^2 + 3^3 + 3^2$
   b. $5 \times 2 + 5^2$
   c. $(2 \times 3^2)^2 + (2 + 3^2) \times 2$
2) Transforme las siguientes expresiones sustituyendo cada signo de adición por el de multiplicación y cada signo de multiplicación por el de potenciación:
   a. $(2 \times 3) + 5 + 7 \times 2 \;\rightarrow$
   b. $(2 \times 5) \times 7 + 2 \;\rightarrow$
   c. $(5 + 2) \times 4 \;\rightarrow$
3) Transforme las siguientes expresiones sustituyendo cada signo de multiplicación por el de adición y cada signo de potenciación por el de multiplicación:
   a. $2^3 \times 5 \times 7^2 \;\rightarrow$
   b. $5^3 \times 2^4 \times 3 \;\rightarrow$
   c. $(5 \times 8) \times 2 \;\rightarrow$
   d. $(5^2 \times 2^2) \times 3 \;\rightarrow$
4) Observe las siguientes expresiones y determine en cada caso si es verdadera o falsa:
   a. $2 \times 5 + 3 \times 4 = 5 \times 2 + 4 \times 3$
   b. $2^5 \times 3^4 = 5^2 \times 4^3$

Vuelva a observar las dos expresiones a) y b). ¿Es posible ir de una de ellas a la otra como se hizo en los ejercicios anteriores?

Escuela media, tercer grado

5) Calcule, usando tanto como sea posible, las propiedades de las potencias:

a.	$2^3 \times 2^2 + 2^3 + 2^2$	$a^3 \times a^2 + a^3 + a^2$
b.	$(2 \times 3)^2 + (2^3)^2$	$(ab)^2 + (a^3)^2$
c.	$(2 \times 3^2) + (2^2 \times 3)^2$	$(ab^2) + (a^2 b)^2$

Tabla Nº 3. Comparación entre los ámbitos aditivo y multiplicativo

La interconexión entre fracciones, fracciones algebraicas y números racionales

Este estudio parte de algunas discusiones que tuvimos en nuestro grupo acerca de las posibilidades que nuestro proyecto podría dar al análisis de los números racionales en la escuela media, con la intención de crear continuidad con los niveles superiores.

Existen algunas divergencias epistemológicas entre la visión estructural moderna, que concentra en la escuela media la introducción de los varios ámbitos numéricos, en particular el de los números racionales, y la vieja y consolidada tradición de enseñanza que trata las fracciones desde un punto de vista simplemente operativo sin siquiera llegar al concepto de número racional como clase de fracciones equivalentes. En esta tradición el enfoque con el que se tratan las operaciones tiene el propósito de determinar el resultado para parejas particulares de fracciones y casi nunca llega a la explicitación de las leyes de correspondencia en general. La comparación de fracciones, además, usualmente se lleva cabo pasando a la representación decimal del cociente entre el numerador y el denominar (que por supuesto con frecuencia es aproximado) y a los estudiantes nunca se les pide ver cómo una fracción varía a medida que su numerador y/o denominador varían[16]. Infortunadamente este procedimiento no permite pasar a la comparación de fracciones en términos generales ni tampoco permite la conceptualización de cómo varía una fracción genérica cuando sus términos varían.

Nuestro estudio se basa en la hipótesis de que enfocarse desde muy temprano en el uso de letras permite enfrentar preguntas elementales acerca de las fracciones desde un punto de vista general, de tal manera que los estudiantes puedan desarrollar modelos conceptuales flexibles, efectivos y transparentes tales como los números racionales, el orden y las operaciones entre los números racionales, en términos generales.

Un propósito específico es inducir el análisis de los significados que conllevan diferentes representaciones del numerador y/o el denominador de una fracción numérica simple o de fracciones algebraicas, de tal manera que se evite o por lo menos se limite el comportamiento estereotipado o los errores clásicos en la transformación de dichas fracciones. Desde un punto de vista conceptual queremos que los estudiantes sean conscientes de: (i) cómo reconocer fracciones equivalentes[17]; (ii) cómo comparar fracciones sin recurrir a la representación decimal; (iii) las razones que están en la base de las definiciones generales de adición y multiplicación (a través de preguntas ta-

16. López-Real (1998) presenta un estudio interesante sobre el tópico.
17. En el mejor de los casos, los estudiantes manejan la conceptualización de cómo pasar de una fracción a una equivalente, pero no pueden decir en general cuándo dos fracciones son equivalentes. Esto sucede también en niveles superiores.

les como su independencia de las fracciones que representan, la inclusión de los números naturales en los números racionales no negativos); (iv) las simplificaciones de cálculo producidas al reducir una fracción a su mínima expresión y específicamente al recurrir al mínimo común divisor de los denominadores para realizar la adición; (v) la existencia del opuesto y del recíproco para cada número racional diferente de cero (y a través de estos conceptos ir hacia las operaciones de diferencia y división); (vi) la densidad, la naturaleza arquimediana pero incompleta de la estructura de orden y las leyes de monotonía.

El trabajo experimental comenzó este año y la investigación se ha vuelto muy delicada y sutil. Los tópicos que ya hemos enfrentado tienen que ver con cuatro puntos que hemos mencionado; algunas de las actividades conexas se reportan en la Tabla Nº 4; otras consideran el problema de definir en términos generales las operaciones y su legitimidad como las correspondientes en los números naturales. Para más detalles sobre esta investigación ver Malara (1999b); en cuanto a los resultados todavía seguimos analizándolos[18], aunque debemos decir que los profesores reconocieron que esta nueva forma de mirar los números racionales es muy productiva. En particular, ellos subrayaron que:

- el uso de letras permite la enseñanza metacognitiva de las propiedades y algoritmos de las operaciones;
- además de permitir que los estudiantes distingan entre el número y su representación, el trabajo con múltiples representaciones de un número en el ámbito de los números naturales es muy importante porque, aquí también, permite que ellos acepten ver fácilmente las fracciones equivalentes como representaciones diferentes del mismo número racional;
- prestar atención a los aspectos estructurales permite un enfoque fácil hacia dos aspectos que didácticamente hablando son más bien delicados: (a) ampliar el concepto de número; (b) ampliar el ámbito numérico.

En particular fue significativo y efectivo trabajar en la construcción de clases de fracciones equivalentes con el propósito de:

- comparar números racionales (combinando la comparación de los números decimales correspondientes, el método de reduc-

18. Los resultados más problemáticos que debemos analizar tienen que ver con la comparación de números racionales.

ción al mismo denominador y el producto cruzado, aunque éste debió profundizarse más adelante);

- investigar acerca de la posible definición de las operaciones de adición o multiplicación, de tal manera que los resultados no dependan de las fracciones que se usen y que se obtengan fracciones equivalentes cuando se cambie la representación de un sumando o de un factor;
- observar la coherencia con las operaciones correspondientes en los números naturales y promover la visión de la ampliación del ámbito numérico.

Segundo y tercer grado

1) Construya fracciones equivalentes a las que se dan, de acuerdo con las indicaciones expresadas por el esquema ($\leftarrow \rightarrow$)

$$\leftarrow \frac{15}{25} \rightarrow; \leftarrow \frac{10.b}{14} \rightarrow; \leftarrow \frac{3.2.a}{14} \rightarrow; \leftarrow \frac{18.k}{2 \cdot a \cdot 15} \rightarrow$$

2) Para cada pareja de fracciones entre llaves, determine cuál es menor y explique por qué:

$$\{\frac{15}{17}; \frac{13}{19}\} \ ; \ \{\frac{19}{36}; \frac{11}{24}\} \ ; \ \{\frac{235}{352}; \frac{115}{176}\}$$

Tercer grado

3) Le pedimos que construya fracciones equivalentes para cada una de las siguientes fracciones; encuentre si hay casos difíciles y diga por qué son difíciles:

$$\frac{5}{7} \ ; \ \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 9}; \quad \frac{p}{k} \quad ; \ \frac{3.a}{12}; \ \frac{5+4}{11}; \ \frac{a+b}{2}$$

4) Siga la estrategia que usted prefiera, compare cada pareja de fracciones y explique cuál es la menor:

$$\{\frac{3}{4}; \frac{5}{6}\} \ ; \{\frac{11}{24}; \frac{17}{36}\}; \ \{\frac{2a}{17}; \frac{3a}{22}\}$$

Segundo y tercer grado

5) Reemplace las letras con los valores numéricos posibles que hacen verdaderas las siguientes igualdades:

$$\frac{k+1}{4} = 2; \ \frac{8}{k+1} = 4; \ \frac{4}{5} = \frac{12}{k+2}; \ \frac{15}{18} = \frac{k}{k+1}; \frac{k}{3} \cdot \frac{4}{m} = \frac{5}{6}; \ \frac{2}{3} \div \frac{c}{d} = \frac{6}{21}$$

Tabla Nº 4. Ejemplos de las actividades propuestas

A pesar de los problemas abiertos, el resultado muy positivo muestra la consciencia de los profesores sobre dos puntos importantes: (a) la didáctica usual de los números racionales es limitante tanto desde un punto de vista cultural como desde el de las habilidades de los estudiantes; (b) el prestar atención a los aspectos estructurales permite que los estudiantes enfrenten por sí mismos problemas importantes tales como la construcción de las operaciones aritméticas en un ámbito numérico nuevo y más amplio.

Aproximación al concepto de función

Es bien conocido que los asuntos didácticos acerca de la aproximación al concepto de función son extremadamente variados y complejos. La primera gran elección que es didáctica pero también, y más que todo, cultural tiene que ver con el papel de la gráfica. Existen muchos posibles registros de representación para una función (verbal, algebraica, tabular y gráfica), pero la gráfica definitivamente tiene una importancia fundamental que infortunadamente si se maneja sin destreza puede llegar a ser un obstáculo epistemológico en la construcción del concepto de función en su acepción más moderna[19]. Nuestro grupo quería crear un plan para innovación en este tópico para los tres cursos de la escuela media, con etapas didácticas que tuvieran el propósito de desarrollar cada una de esas representaciones y en particular promover su coordinación con la intención de crear la base correcta para el álgebra de funciones. Esta parte del proyecto se desarrolló principalmente en las clases tutoradas por R. Iaderosa,[20] pero sus resultados fueron apreciados por todos los demás profesores del grupo quienes al principio eran reluctantes (porque preveían algunas dificultades) pero luego definitivamente quisieron extender la experimentación a sus clases. A continuación se muestra cómo se organizó el plan:

Primer grado. Enfasis en las dificultades que usualmente tienen los estudiantes menos hábiles al comienzo de la escuela media con las siguientes actividades: lectura y uso de símbolos literales (letra como generalización de número), búsqueda de relaciones entre números, expresión verbal; coordinación del registro numérico/literal con el registro verbal y viceversa; interpretación verbal y lectura de datos a partir de gráficos que representan leyes no codificadas.

---

19. Estamos de acuerdo con Duval (1994) acerca de la extrema importancia de separar los conceptos matemáticos de su representación gráfica y de que se puede llegar a una conceptualización real solamente a través de la coordinación de varios registros.
20. Encontramos muy importante, en las partes dedicadas a este tema, el estudio del proyecto inglés "NMP *Mathematics for Secondary School*" editado por Harper (1987).

Segundo grado. Búsqueda y explicitación de relaciones en el registro verbal y en el numérico/algebraico; reconocimiento e interpretación de gráficos sobre la base de lo que ellos dicen acerca de la variabilidad de las cantidades examinadas, sin leyes formalizadas; coordinación de los registros verbal y algebraico con el registro gráfico: representación de relaciones expresadas en muchas formas (de la forma implícita a la explícita, de la directa a la inversa, etc.); análisis y comparación de las representaciones gráficas que se derivan de diferentes formulaciones de la misma relación algebraica; primeros intentos de formalizar algebraicamente relaciones a través de la observación de datos numéricos; combinación de leyes y gráficos de una manera intuitiva no formalizada, interpretación de gráficos que representan principalmente fenómenos físicos.

Tercer grado. Transformación algebraica de funciones matemáticas en las tres formas posibles, las dos explícitas y la implícita; reconocimiento de algunas formas fundamentales de funciones (desde un punto de vista estructural): razón constante, suma constante, producto constante, y correspondencia de cada una de esas formas con un gráfico particular; análisis de cada una de esas clases de función desde el punto de vista algebraico; interpretación geométrica de cada elemento de la fórmula (el coeficiente numérico, su signo, etc.).

En Malara e Iaderosa (1999b) reportamos con gran detalle todas las ideas que encontramos en los estudiantes y las dificultades que tuvieron durante algunas etapas del segundo y tercer grado. En el segundo grado las dificultades tuvieron que ver con la coordinación entre la representación gráfica de un fenómeno y el análisis de tal fenómeno expresado verbalmente, y en particular, con la habilidad de reconocer lo que los gráficos dicen acerca de la variabilidad de las cantidades que se están examinando, sin leyes formalizadas. En el tercer grado las dificultades tuvieron que ver con: (i) la coordinación de las varias representaciones en la forma algebraica, verbal, gráfica y tabular; (ii) el uso del gráfico para concretar el concepto de familia de curvas y por tanto destacar el papel de la variable-parámetro; (iii) la interpretación gráfica de los elementos algebraicos contenidos en la fórmula (signos, coeficientes numéricos, operaciones, letras, etc.); (iv) la relectura de la fórmula comenzando a partir del gráfico y el énfasis en las diferencias en el significado entre formas ‘análogas’ (e.g., $y = x/3$; $y = 3/x$); (v) la transformación algebraica de funciones matemáticas en las tres formas posibles, dos explícitas y una implícita.

Particularmente en este último punto quisimos poner a prueba si los estudiantes podían controlar simultáneamente la pareja función/función inversa y compararlas también de acuerdo con el sistema de referencia usado, si se comenzaba por estudiar las relaciones binarias uno a uno dadas en una forma icónica, si se trabajaba con la explicitación simultánea de la relación en las tres formas, primero verbalmente y después algebraicamente, y si considerábamos simultáneamente la tabulación de las correspondientes parejas en los dos sentidos y su representación gráfica. Los resultados que hemos obtenido en la clase de tercer grado aunque satisfactorios en lo que tiene que ver con la coordinación entre los registros algebraico y gráfico, han sido problemáticos en algunos aspectos y requieren un análisis más profundo especialmente en la coordinación de función y función inversa, debido también a las elecciones metodológicas que la profesora hizo acerca del sistema de referencia.

Otra cuestión problemática que debe ser revisada es la armonización entre el tiempo dedicado a la didáctica y el dedicado a la investigación.[21]

LAS CONTRIBUCIONES DE LOS PROFESORES A LA INVESTIGACIÓN

La contribución de los profesores al desarrollo del proyecto fue considerable y variada. Una vez aclaradas las hipótesis y acordados los lineamientos para la intervención en clase en relación con las metas específicas, los profesores con frecuencia crearon de manera autónoma las pruebas que querían aplicar a sus estudiantes. Antes de aplicarlas, siempre las discutimos dentro del grupo para evaluar de antemano su potencialidad y dificultades; en esa ocasión el director de la investigación podía señalar la carencia de algunos aspectos de las pruebas y sugerir de qué manera se podían refinar, o simplemente aprobar y apreciar la calidad. Por ejemplo, las pruebas creadas por L. Gherpelli para enriquecer la argumentación en la aritmética (Malara y Gherpelli, 1996) y algunas pruebas sobre números racionales (comparación o generación de fracciones equivalentes, reportadas en la Tabla Nº 4) han sido apreciadas por su calidad y efectividad. Más aun las preguntas de la Tabla Nº 3 que conciernen a la generación de una expresión a partir de las dadas, por transferencia analógica proveniente de la notación aditiva-multiplicativa a la multiplicativa-exponencial y viceversa, fueron creadas por R. Iaderosa y como ya se dijo obtuvieron diferentes reacciones entre los profesores: algunos las apreciaron principalmente como herramientas de investigación, otros pensaron que eran desatinadas ya que de ninguna manera resultaban importantes a los ojos de los estudiantes y eran

21. Un análisis interesante de las influencias recíprocas de las diferentes variables de tiempo implicadas al realizar las investigaciones italianas de innovación se puede encontrar en Arzarello (1999).

opcionales en un marco didáctico general para el desarrollo del pensamiento algebraico[22].

En general, sin embargo, la mayoría de las pruebas para la experimentación fueron seleccionadas de un grupo de propuestas provenientes de varios miembros del equipo después de un análisis cuidadoso de las dificultades y posibilidades que podían tener para los estudiantes. Esto ocurrió, por ejemplo, con los tests que tenían que ver con la aproximación a la prueba: discutimos sobre las dificultades en la elaboración sintáctica de las expresiones creadas como traducción de las hipótesis y la interpretación de las respectivas transformadas para llegar a la tesis, o sobre las dificultades para resolver problemas algebraicos.

Pusimos particular atención a la formulación del texto en los tests, dando la mayor importancia a la inmediatez de la comunicación más que a la perfección lingüística. Algunas veces los textos fueron formulados (o reformulados) usando la jerga de los niños o códigos particulares empleados en la clase. Se pueden hallar ejemplos de esto en las preguntas 1 y 5 de la Tabla Nº 3 donde la profesora utilizó la palabra "calcule": este verbo es impropio para la clase de desempeño que ella quería promover (lo que sin embargo, ya había explicado oralmente a los estudiantes) pero en su opinión este término es en cierta forma neutro dado que términos más apropiados podrían causar alguna dificultad[23]. De manera similar en la Tabla Nº 4, la profesora utilizó un código gráfico inusual creado por ella específicamente para hacer que los estudiantes trabajaran simultáneamente en la simplificación de fracciones y en la generación de fracciones equivalentes porque ella quería poner juntas dos actividades que usualmente se vivencian como separadas.

El equipo discutió y seleccionó también los problemas sugeridos por el director de la investigación y cuando fueron aceptados, sus textos fueron revisados con frecuencia de tal manera que, como ya se dijo, fueran más fáciles para los estudiantes. Algunas veces sus propuestas fueron rechazadas porque se veían muy avanzadas o muy diferentes de las actividades usuales de clase; esto ocurrió, por ejemplo, con unas guías de trabajo interesantes provenientes del ya mencionado proyecto inglés NMP, dirigidas a comparar gráficos —que tenían que ver con el mismo fenómeno físico observado desde diferentes puntos de vista— considerando la relación de diversas parejas de magnitudes. En cuanto a la construcción del concepto de número racio-

22. Las opiniones de los profesores son tan diferentes porque cada uno de ellos tiene unos antecedentes culturales diferentes y por tanto tienen una concepción diferente para cada tópico examinado. Esto muestra qué tan real es el debate cultural dentro del grupo y de qué manera cada participante es totalmente autónomo en su papel.

23. El grupo discutió y criticó el uso de esta palabra pero la profesora prefirió mantenerla debido a las razones expuestas.

nal, el director subrayó la conveniencia de caracterizar las clases de fracciones equivalentes, haciendo con los estudiantes la prueba del siguiente enunciado a partir de casos particulares “si *la fracción* c/d es equivalente a la *fracción reducida* a/b, entonces, c/d se puede obtener de a/b, multiplicando sus términos por un mismo número natural, diferente de cero”[24]. Los profesores rechazaron esta propuesta porque la encontraron difícil aun en casos particulares, aunque los conceptos son simples y los estudiantes tenían experiencia en usar letras y el principio de sustitución. No obstante, nuestra experiencia dice que con el tiempo los profesores reconsideran las propuestas que han rechazado antes y eventualmente las experimentan.

Por otra parte, debemos considerar el papel importante que los profesores jugaron en el desarrollo de las discusiones de clase (las discusiones iniciales, para construcción, para balance y/o institucionalización), en la comprensión de la personalidad de sus estudiantes y en la evaluación de sus contribuciones a las actividades colectivas también con referencia a su carácter. Para conducir tal trabajo los profesores manejaron perfectamente el doble papel de participante y observador (Eisenhart, 1988), pues fueron capaces de separar el sujeto observador de los sujetos observados en su relación de diálogo (Arzarello, 1997). Sin embargo, los documentos de estas actividades no fueron siempre completos; por ejemplo, como lo especifica Malara (1999b) la autonomía de los profesores los llevó a pasar por alto la planeación común de los lineamientos para la discusión, el registro de las discusiones (ellos prefirieron ser testigos a través de sus diarios, usualmente basados en su memoria más que en los registros originales); rechazaron el tener un observador silencioso (que perturba e inhibe); olvidaron hacer un análisis conjunto de los protocolos (puesto que hay tantos, ellos los preseleccionaron y ofrecieron sólo prototipos para el análisis en grupo).

Aun así, la contribución de los profesores fue valiosa cuando evaluamos los protocolos de los estudiantes, pues sabían quién los hizo y en qué atmósfera, lo que iba más allá del análisis del director. En Malara e Iaderosa (1999a) se reporta un ejemplo interesante sobre los diferentes puntos de vista desde los cuales se puede evaluar un protocolo; en tal ejemplo se establece

---

24. Los pasos de la demostración que se debían desarrollar con los estudiantes son:
Paso 1. Comience con una fracción particular, por ejemplo, $3/7$, suponga que $3/7 = c/d$ y pruebe en una actividad colectiva que necesariamente $3d = 7c$. Lo que se debe usar aquí es que: (i) si 3 es divisor del producto $7c$, como no es divisor de 7, debe serlo de c; (ii) es posible expresar a c como 3 por algún otro número y dar un nombre a ese número, por ejemplo, q, entonces se tiene que $c = 3q$; (iii) sustituyendo en la igualdad $3d = 7c$ se obtiene que $3d = 7 \times 3q$ y cancelando se tiene que $d = 7q$.
Paso 2. Generalice el resultado, sustituyendo $3/7$ por cualquier fracción reducida a/b a lo largo del razonamiento que se ha hecho.

la importancia de la evaluación conjunta. En este punto queremos citar las palabras de Iaderosa tomadas de Garuti e Iaderosa (1999):

> Hemos tenido experiencia directa de esto: deben integrarse varias herramientas diferentes para la evaluación si se quiere leer e interpretar los resultados de una actividad de investigación; es extremadamente importante darse cuenta de que existe complementariedad entre la lectura externa, objetiva del investigador y la lectura personalizada, humana del profesor que conoce y vive directamente la dinámica creada en la clase y puede leer entre líneas la trayectoria de cada estudiante, más allá de las palabras incorrectas que utiliza a veces, para inferir y evaluar de acuerdo con sus dificultades y potencialidades cuál trayectoria mental está tomando. Si un análisis objetivo de los resultados integrara todo esto, entonces podríamos lograr una evaluación más científica.

No se puede desconocer la contribución de los profesores en el inicio, cuando consideramos e identificamos problemas de investigación específicos y formulamos las hipótesis que debían verificarse, etc., y, sobre todo, su trabajo final cuando escribieron partes importantes de los reportes de investigación.

Al lado de los aspectos positivos nos gustaría considerar también los límites que los profesores impusieron al desarrollo del proyecto. Como se destacó en Malara e Iaderosa (1999a), una vez que se decidieron los lineamientos para la realización del proyecto, la ejecución efectiva de la investigación presentó dificultades cruciales entre las cuales, además de las concernientes a organización, estuvieron: los antecedentes culturales de los profesores (algunos tenían un grado en matemáticas, otros en disciplinas científicas distintas), sus opiniones acerca de asuntos didácticos (la tradición de enseñanza, las tendencias al programar lecciones, el grado de importancia dado a las diferentes actividades, etc.), las preferencias personales y lo que es más importante las diferentes formas de ver su propio papel (más como un profesor, más como un investigador, o algo intermedio).

Todos estos asuntos eventualmente influyeron tanto en la elección y la participación en las actividades que fueron objeto de la experimentación como en la forma de llevar a cabo la investigación misma (el manejo de la discusión en clase, la recolección y clasificación de los protocolos, el establecimiento del comportamiento de los estudiantes en categorías, etc.).

En lo que concierne a los aspectos de la disciplina matemática, por ejemplo, no logramos manejar las intervenciones didácticas sobre los números enteros relativos en los primeros grados (alumnos de once o doce años) porque algunos profesores creían que era importante organizar la enseñanza a lo largo del desarrollo histórico de los conceptos: esto deriva de la tradición de enseñanza.

Además, con algunos profesores no fue posible enfrentar preguntas sintácticas y estructurales como las que aquí se reportan porque ellos no percibían algunos aspectos peculiares del álgebra abstracta que consideraron muy difíciles para el nivel promedio de los estudiantes.

De manera similar, por razones conectadas con nuestro origen cultural, no pudimos seguir las sugerencias de muchas investigaciones del área anglosajona acerca del estudio de las funciones lineales y cuadráticas y de su representación gráfica, lo que podría proporcionar un interesante escenario a las posibilidades de estudio en el salón de clase bien fuera para revisar el álgebra elemental (ver por ejemplo la solución de una ecuación en términos de la búsqueda de ceros de la función que resulta como diferencia de los dos miembros constitutivos de la ecuación, o, considerar la cantidad incógnita como un caso particular de variable), o para revisar aspectos culturalmente más avanzados que conciernen a la estructura algebraica del conjunto de tales funciones, gracias también al uso de la calculadora gráfica que permite una visión coordinada entre operaciones sobre funciones y composiciones de sus gráficas.Solamente una profesora del grupo (R. Iaderosa) declaró privilegiar este enfoque porque focaliza la atención sobre el concepto de función —concepto difícil de conquistar dada su complejidad— lo que favorece a largo plazo una mejor adquisición de dicho concepto. De nuevo, los demás profesores subrayaron la importancia de recorrer el proceso histórico, privilegiando el estudio de los problemas algebraicos enunciados verbalmente que son importantes bien sea para los aspectos de traducción formal o para el aspecto lógico propio del análisis y concatenación de las informaciones importantes en la actividad más general de resolución de problemas.

Esto implica como lo hemos visto algunas divergencias dentro del proyecto mismo y el desarrollo de investigaciones autónomas por parte de algunos profesores.

Por tanto, aunque los resultados obtenidos parezcan buenos debe considerarse que están estrechamente relacionados con la personalidad, la sensibilidad humana y cultural de cada profesor-investigador y que no siempre son comparables aunque se refirieran a los mismos grados escolares y fueran obtenidos por profesores del mismo grupo.

CONSIDERACIONES FINALES

A pesar de que esta es una visión global muy general, probablemente da una idea de lo que hemos hecho hasta ahora y de cuán complejo es llevar a cabo una investigación para la innovación trabajando de esta manera, típica en muchos grupos italianos de investigación, que podemos llamar el “modelo italiano” de investigación para la innovación.

Primero que todo, esta forma de desarrollar una investigación requiere un largo período de confrontación para las partes involucradas y no se puede hacer sin la mediación cultural y didáctica con los profesores (no se puede olvidar que además de que está manejado personalmente por profesores, los objetos de nuestras investigaciones pertenecen a un programa específico en la escuela que debe ir mano a mano con un marco más general que concierne a la enseñanza de todas las áreas de la disciplina y tiene en cuenta los tiempos didácticos). Más aun, con frecuencia nos encontramos trabajando “sin protección” ya que el objeto de nuestro estudio es el comportamiento de profesores y estudiantes enfrentados a la innovación, lo que a veces requiere volver atrás a los estudios ya hechos para destacar y refinar algunos aspectos que habían permanecido en la sombra o sin resolver.

Desde un punto de vista más general, debido a la forma en que se llevan a cabo y a todas las variables involucradas, estas investigaciones no se pueden reproducir en el sentido clásico. Son prototipos útiles para dar nuevas visiones y nuevas direcciones a la mayoría de profesores y son interesantes para quienes necesitan un enfoque diferente, más apropiado a ciertos tópicos; pero su utilidad está relacionada con la habilidad de los profesores para evaluar y apreciar las preguntas en juego y como lo señala Zan (1999) tiene que ver con un aspecto muy delicado: la formación del profesor y su cultura.

REFERENCIAS

Arzarello, F. (1997). Assessing long term processes in the class of mathematics: the role of the teacher as a participant observer. En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), *Proceedings* SEMT 97 (pp. 5-10). Praga.

Arzarello, F. (1999, en prensa). Linee di tendenza per la ricerca in Italia: un quadro di riferimento teorico. En J. Da Ponte, N.A. Malara y M. Sierra (Eds.), *Actas I Escola de Verão de Educação Matematica*. Santarem, Portugal.

Arzarello, F., Bazzini, L. y Chiappini, G. (1992). L'algebra come strumento di pensiero (Ponencia presentada en el Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Pisa, 1992. Publicado en series TID-CNR, IDM, n. 6, 1994).

Bednarz, N. y Janvier, J. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bell, A.W., Malone J.A. y Taylor P.C. (1987). *Algebra: an exploratory teaching experiment*. Nottingham, UK: Shell Centre.

Bloedy-Vinner, H. (1995). Analgebraic interpretations of algebraic expression. Functions or predicates? En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME Conference, 2* (pp. 42-49). Recife, Brazil: Universidade Federal de Pernambuco.

Drouhard, J. P. y Sackur, C. (1997). Triple approach: a theoretical frame to interpret students´ activity in algebra. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2* (pp. 225-232). Finland: University of Helsinki.

Duval, R. (1994). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leurs apprentissage. En A. Antibi (Ed.), *Proceedings CIEAEM 46, 1*, (pp. 222-233).

Eisenhart, M.A. (1988). The ethnographic research tradition and the mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19* (2), 99-114.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9* (2), 19-25.

Fishbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. En R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strässer y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht, NL: Kluwer.

Fishbein, E. y Barach A. (1993). Algorithmic models and their misuse in solving algebraic problems. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 162-172). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.

Garuti, R. e Iaderosa, R. (1999, en prensa). Rilevanza della ricerca in didattica della matematica sulla qualità dell'apprendimento. En J. Da Ponte, N.A. Malara y M. Sierra (Eds.), *Actas I Escola de Verão de Educação Matematica*. Santarem, Portugal.

Gherpelli, L. y Malara, N.A. (1994). Argomentazione in Aritmetica. En Basso y Alii (Eds.), *Numeri e Proprietà* (pp. 55-60). Parma: CSU Parma.

Gherpelli, L. y Malara, N.A. (1998). Il problema del passaggio aritmetica-algebra nella scuola media: Scene da una classe osservata nell'intero triennio. En B. D'Amore (Ed.), *Atti Conv. Naz. "Incontri con la Matematica"* (pp. 135-137). Castel S. Pietro (BO).

Harper, E. (Ed.) (1987). *NMP Mathematics for Secondary school*. Essex, England: Longman.

Kieran, K. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher P. y J. Kilpatrik (Eds.), *Mathematics and Cognition. ICMI Study Series*, (pp. 96-112). Cambridge: Cambridge University Press.

Kieran, K. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, K. (1994). A functional approach to the introduction of algebra, some pros and cons. En J.P. da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 157-176). Lisboa, Portugal: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Kieran, K. (1998). The changing face of school algebra. En C. Alsina y Alii (a cura di), *Proceedings ICME 8: selected lectures* (pp. 271-286). S.A.E.M. Thales.

Küchemann, D.E. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children Understanding Mathematics* (pp. 11-16). London: Murray.

López-Real, F. (1998). Students' reasoning on qualitative changes in ratio: a comparison of fraction and division representations. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 224-230). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

MacGregor, M. (1991). *Making sense of algebra, cognitive processes influencing comprehension*. Victoria, Australia: Deakin University Press.

Malara, N.A. (1993). Il problema come mezzo per promuovere il ragionamento ipotetico e la metaconoscenza. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *16* (10), 928-954.

Malara, N.A. (1997). Problemi nel passaggio Aritmetica-Algebra. *La Matematica e la sua Didattica, 2,* 176-186.

Malara, N.A. (1998, en prensa). Didattica della Matematica: il caso italiano. En H. Badertschecher, A. Hollenstein, H.U. Grunder (Eds.), *Proceedings of International Colloquium "Fachdidaktik als Wissenschaft und Forschungsfeld in der Schweiz"*. Ascona, Switzerland.

Malara, N.A. (1999a). An aspect of a long term research on algebra: the solution of verbal problems. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3,* (pp. 257-264). Haifa, Israel: Israel Institute of Technology.

Malara, N.A. (1999b, en prensa). Il passaggio frazioni, frazioni algebriche, razionali: potenzialità e difficoltà nella messa in atto di un percorso innovativo di intreccio tra aritmetica ed algebra. En G. Navarra, M. Reggiani y R. Tortora (Eds.), *Atti del 3° Internuclei Scuola dell'obbligo*. Vico Equense, Napoli.

Malara, N.A. y Gherpelli, L. (1996). Argumentation and proof in the elementary number theory in the triennium of middle school. *L'Educazione Matematica*, *2* (2), 82-102.

Malara, N.A. e Iaderosa, R. (1998, en prensa). The interweaving of arithmetic and algebra: Some questions about syntactic, relational and structural aspects and their teaching and learning. En I. Schwanck (Ed.), *Proceedings WG6-CERME 1*. Osnabruck.

Malara, N.A. e Iaderosa, R. (1999a). Theory and practice: a case of fruitful relationship for the renewal of the teaching and learning of algebra. En F. Jaquet (Ed.), *Proceedings CIEAEM 50 - Relationship between Classroom Practice and Research in Mathematics Education*, (pp. 38-54).

Malara, N.A. e Iaderosa, R. (1999b, en prensa). Analisi e valutazione delle difficoltà in un percorso di apprendimento nella scuola media finalizzato alla conquista del concetto di funzione nei suoi vari aspetti. En *Atti del 3° Internuclei Scuola dell'obbligo*. Vico Equense, Napoli.

Navarra, G. (1999, en prensa). Percorsi esplorativi di avvio al pensiero algebrico osservazione e rilevazione di difficoltà in insegnati ed allievi. En *Atti del 3° Internuclei Scuola dell'obbligo*. Vico Equense, Napoli.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A. (1994). The gains and pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Yerushalmy, M. (1997). Emergence of new schemes for solving algebra word problems: The impact of technology and the function approach. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* (pp. 165-178). Finland: University of Helsinki.

Zan, R. (1999, en prensa). La qualità della ricerca. En J. Da Ponte, N.A. Malara y M. Sierra (Eds.), *Actas I Escola de Verão de Educação Matematica*. Santarem, Portugal.

Nicolina Malara
Dipartimento di Matematica
Università of Modena & Reggio Emilia
Modena, Italia
E-mail:malara@unimo.it